

# ESTUDIO DE FUNCIONES CON GEOGEBRA

Clara Benedicto Baldonado

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Valencia

## RESUMEN

Presentamos una propuesta de mejora de la comprensión de algunos conceptos referidos a funciones, gracias al uso del GeoGebra. El trabajo narra la experiencia realizada con alumnos de 2º de Bachillerato del IES Campanar de Valencia, donde se realizó una serie de actividades con la ayuda de GeoGebra que les facilitaba la visualización de imágenes dinámicas y la comprensión de los conceptos (tasa de variación media, derivada, monotonía, extremos y concavidad).

*Palabras clave: Análisis didáctico, funciones, GeoGebra.*

## ABSTRACT

We are presenting a proposal to improve the understanding of some concepts related to functions with the use of GeoGebra. The study gives an account of an experience with students from grade 12 of IES Campanar in Valencia, where students worked on a series of activities with the help of GeoGebra which facilitated the visualization of dynamic images and understanding of concepts (average rate of change, derivative, monotony and concavity).

*Keywords: Didactic analysis, functions, GeoGebra.*

## INTRODUCCIÓN

El problema que motiva esta investigación radica en que, en los cursos tradicionales de 2º de Bachillerato, cantidades significativas de estudiantes no logran comprender algunos conceptos referidos a funciones. El trabajo realizado tenía como objetivo hacer una propuesta de trabajo basada en la utilización del GeoGebra, dado que esta herramienta potencia la percepción visual y geométrica de los conceptos, facilitando con ello su comprensión.

En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, algunos estudiantes resuelven muchos problemas y ejercicios y, por supuesto, aprueban exámenes del área, pero este hecho no garantiza la real comprensión de los conceptos matemáticos

utilizados, pues muchos exámenes no trascienden lo operativo, lo mecánico o memorístico.

Nuestra experiencia pretende formular una propuesta metodológica que involucre mecanismos de tipo visual-geométrico, de tal forma que se mejore la integración de los conceptos de tasa de variación media, derivada, monotonía y extremos, concavidad y puntos de inflexión.

Vamos a mostrar cómo el uso del GeoGebra puede contribuir al aprendizaje de los alumnos en los conceptos estudiados. Las técnicas del software educativo nos permiten la representación de imágenes dinámicas que facilitan la visualización de los conceptos, el proceso de razonamiento y la deducción por parte de los alumnos. En particular, el GeoGebra permite la representación de imágenes que resultan costosas de visualizar a través del lápiz y papel o pizarra.

## **METODOLOGÍA**

Nuestra experiencia se realizó durante el periodo de prácticas del Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria, en el IES Campanar de Valencia, y estaba dirigida a dos grupos de 2º de Bachillerato, uno de ciencias sociales y otro científico técnico.

La experiencia consistió en 4 sesiones de 50 minutos con cada uno de los grupos, todas ellas en el aula de ordenadores. En estas sesiones, cada alumno estaba dotado de un ordenador propio y debía completar una serie de actividades en el papel, ayudándose del GeoGebra. Las actividades estaban ordenadas de manera progresiva con el fin de que los alumnos fueran relacionando la información nueva con la previa y concluyendo una relación final por sí solos, favoreciendo así el autoaprendizaje.

Para este trabajo se diseñaron applets interactivos específicos para cada uno de los conceptos que eran objetivo de estudio (tasa de variación media, derivada, monotonía y extremos, concavidad y puntos de inflexión).

## CONTENIDOS MATEMÁTICOS IMPLICADOS

En el trabajo, estudiamos cada uno de los contenidos matemáticos, presentando el objetivo inicial de nuestro estudio y las posibilidades que nos ofrecía el GeoGebra para llevarlo a cabo. Finalmente, terminamos con una pequeña propuesta de enseñanza que llevamos a cabo durante nuestra experiencia

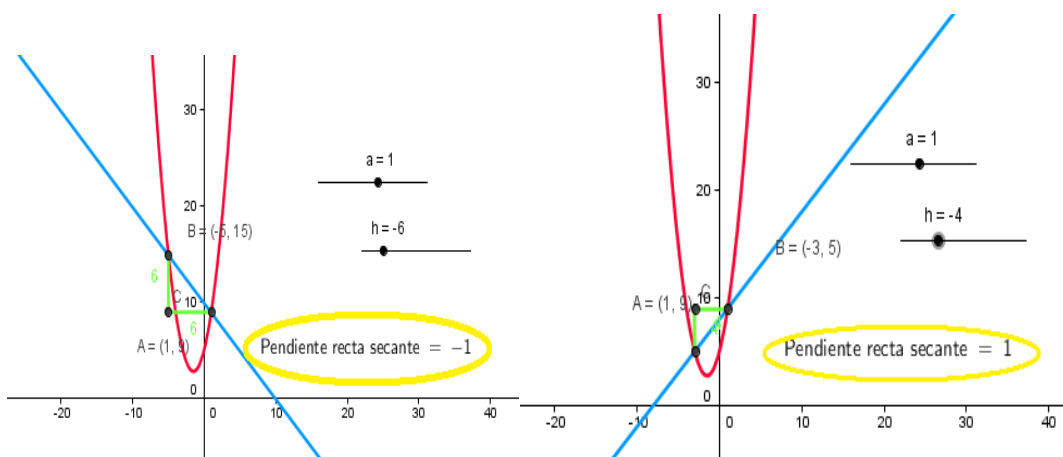
### TASA DE VARIACIÓN MEDIA

#### Objetivo de enseñanza

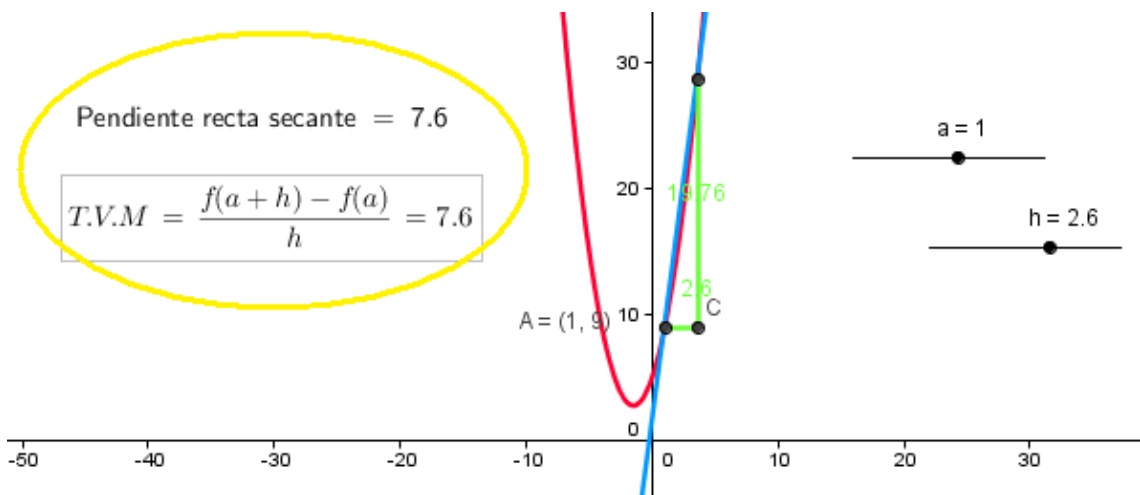
Nuestra intención es que identifiquen la tasa de variación media de una función en un intervalo dado, cómo la pendiente de la recta secante a la función. Una vez conocida la interpretación geométrica de la tasa de variación media no habrá problemas a la hora de introducir la derivada.

#### Posibilidades del GeoGebra

- El programa nos permite observar como al variar los extremos del intervalo, la recta secante se mueve a lo largo de la curva variando su pendiente. El GeoGebra nos proporciona imágenes con movimiento que facilitan la visualización que resultaría muy costosa al representar todas las rectas.



- Además, conforme variamos el intervalo, el alumno no solo puede observar el cambio geométrico que experimenta la recta, sino que además el GeoGebra muestra el cálculo numérico de la pendiente.
- Asimismo, los alumnos pueden comprobar cómo la pendiente de la recta secante equivale a la tasa de variación media, sea cual sea el intervalo.



### Propuesta de enseñanza

- Aplicación de la tasa de variación media.

Es conveniente introducir el concepto de tasa de variación media a través de problemas aplicados para dar a conocer la fórmula de la tasa de variación media a los alumnos.

$$t.v.m f(x)_{[x_1, x_2]} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Ejemplo numérico concreto

Una vez conocida la fórmula de la tasa de variación media proponemos el cálculo de esta a través de un ejemplo numérico de la gráfica representada con el GeoGebra.

- Generalización del ejemplo

Seguidamente generalizarán el cálculo de la tasa de variación media, aplicando su fórmula en un intervalo general,  $[a, a + h]$ .

- Cálculo de la pendiente de la recta representada en un intervalo concreto.
- Cálculo de la pendiente de la recta representada en un intervalo general  $[a, a + h]$ .
- Relación existente entre la pendiente de la recta y la tasa de variación media.

# DERIVADA

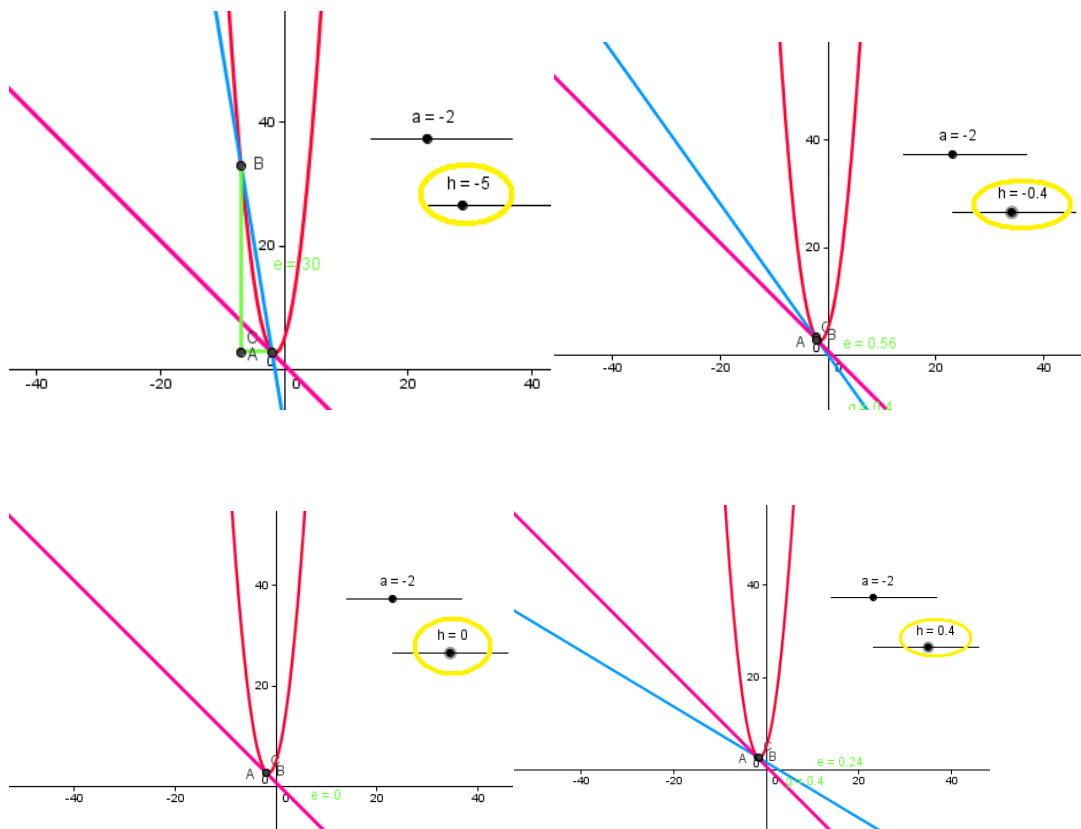
## Objetivo de enseñanza

Nuestra intención es hacer uso de los ordenadores para ofrecer a los estudiantes un enfoque menos formal del concepto de derivada, que permita al alumno desarrollar pensamientos propios a través de la observación y que no se limite a la memorización de los contenidos que el profesor expone. El alumno comprenderá el concepto de derivada a través de la relación existente entre la derivada y la tasa de variación media.

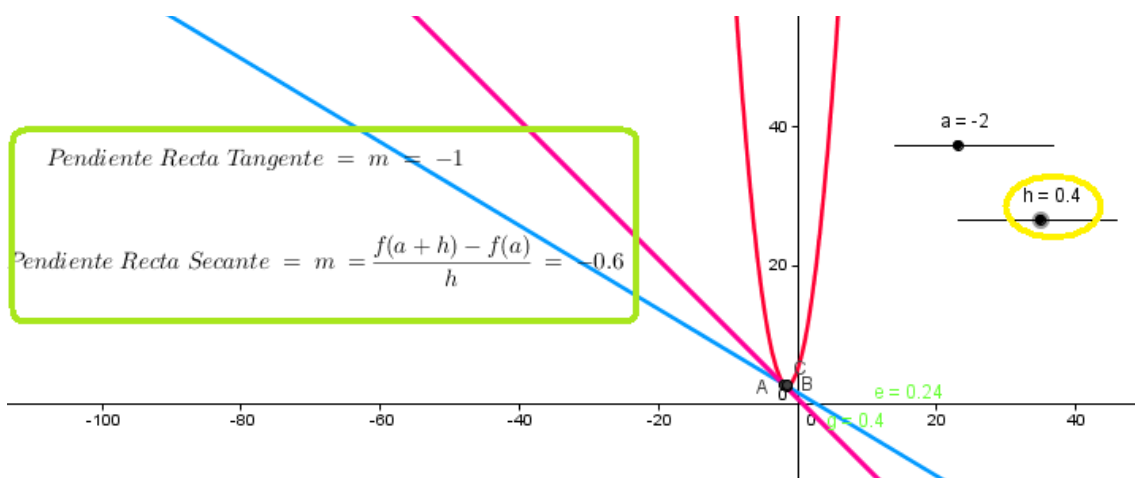
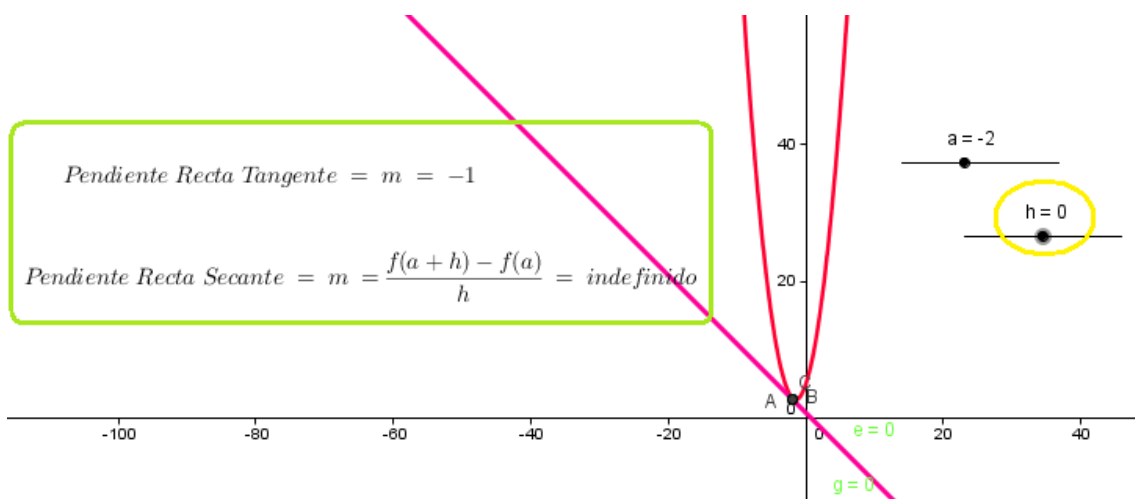
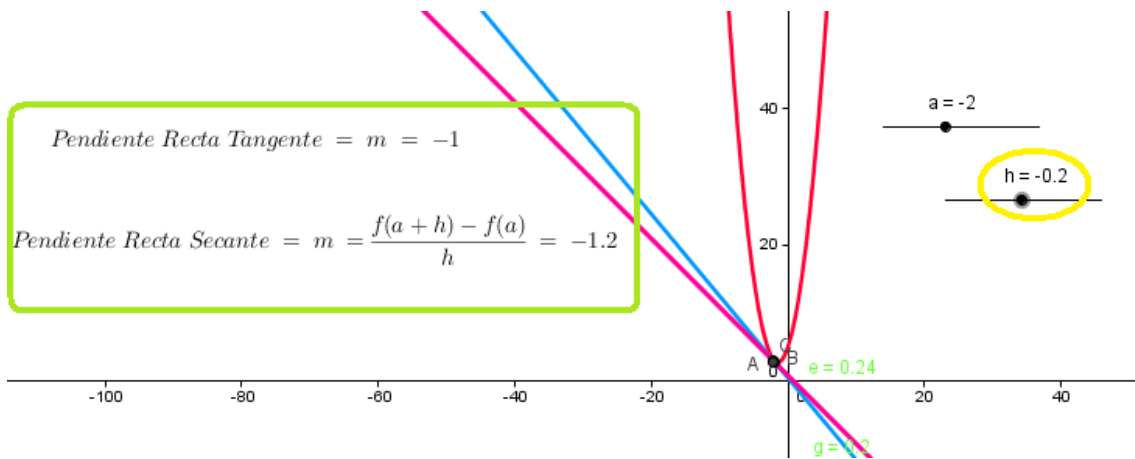
## Posibilidades del GeoGebra

Una vez conocida la interpretación de la tasa de variación media, continuaremos introduciendo la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva.

- Al tratarse de una aplicación dinámica, GeoGebra permite observar cómo la recta secante se mueve a lo largo de la curva conforme variamos la amplitud del intervalo, es decir, cuando el valor de  $h$  varía. El desplazamiento de la recta secante hacia la recta tangente que ofrece el programa permite comprender la noción de límite cuando  $h$  se aproxima a cero.



- Además, el GeoGebra calcula el valor de la pendiente de las dos rectas. Los alumnos podrán observar numéricamente el cambio que experimenta la pendiente de la recta secante conforme se mueve a lo largo de la curva, y como su valor se aproxima al de la pendiente de la recta tangente conforme el valor de  $h$  se aproxima a cero.



## Propuesta de enseñanza

- Introducción de la interpretación geométrica de la derivada.
- Los alumnos deberán observar que ocurre con la recta secante conforme reducimos la amplitud del intervalo.
- Los alumnos deberán observar o deducir que ocurre con la pendiente de la recta secante conforme reducimos la amplitud del intervalo.
- Recordando la interpretación geométrica de ambos conceptos, los alumnos deberán establecer una relación entre ambos.
- Utilizando la fórmula de la tasa de variación media y la relación establecida entre ambos conceptos, los alumnos deducirán la fórmula de la derivada.

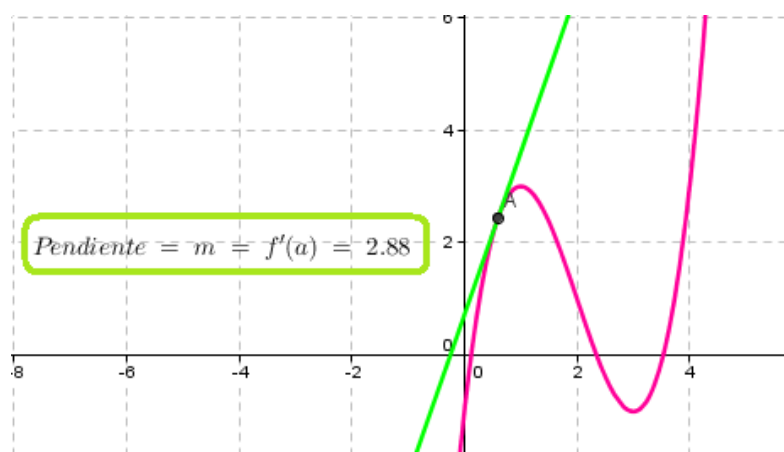
## MONOTONÍA Y EXTREMOS

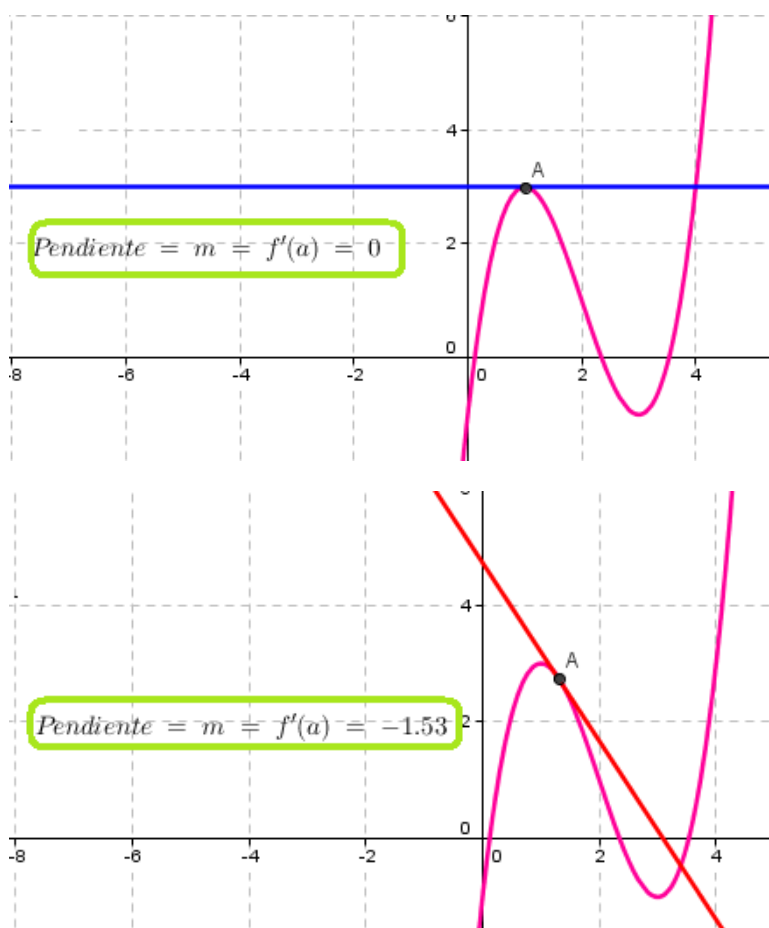
### Objetivo de enseñanza

Nuestro objetivo es que los alumnos comprendan la relación existente entre la derivada y la monotonía de una función, con el fin de que realicen interpretaciones correctas dando sentido al registro algebraico a la hora de resolver problemas.

### Posibilidades del GeoGebra

- El GeoGebra no permite personalizar la recta tangente de manera que la recta se representaba de diferente color según el signo de su pendiente (roja si es negativa; azul si es nula; verde si es positiva). La personalización de la recta tangente unida a los movimientos de la recta a través de la curva que nos ofrece el GeoGebra permiten que el alumno comprenda con facilidad como varía la pendiente de la recta según la curva.





- Además al igual que en el resto de los casos, el programa también nos permite observar numéricamente el valor de la derivada, o pendiente de la recta tangente.

### Propuesta de enseñanza

- Cálculo de los intervalos de crecimiento y los extremos relativos a través de la observación de la gráfica.
- Observando cómo varía la recta tangente a lo largo de la curva según su pendiente, los alumnos deberán establecer una relación entre la pendiente de la recta tangente y la monotonía de la función.
- Por último, recordando la interpretación geométrica de la derivada, los alumnos establecen la relación existente entre la monotonía y extremos relativos, y la derivada de la función.



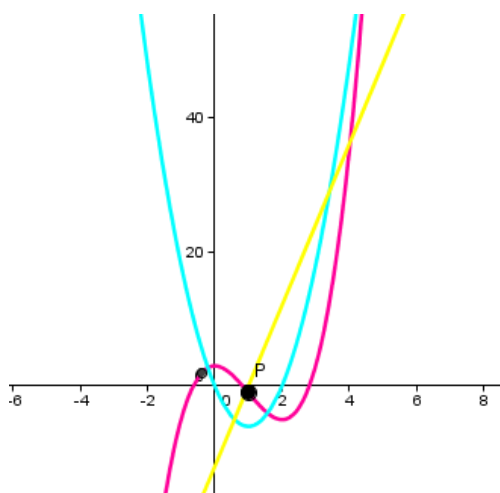
## CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

### Objetivo de enseñanza

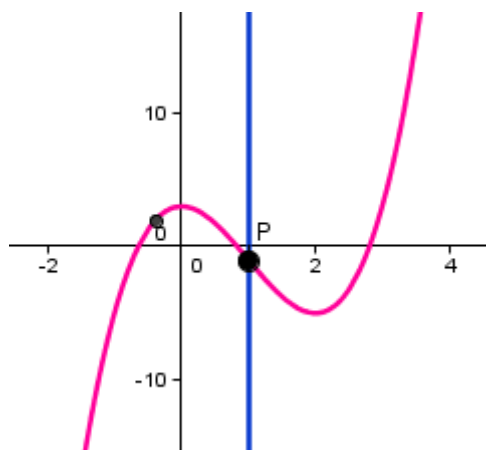
Nuestra intención es que los alumnos comprendan el significado de los dos tipos de concavidad (concavidad y convexidad) y comprendan el concepto de punto de inflexión.

### Posibilidades del GeoGebra

- El GeoGebra nos permitirá representar la primera y la segunda derivada. Esto facilitará el estudio de la monotonía de la derivada a través de la segunda derivada.



- Además nos permite representar el punto de inflexión y observar como varía la gráfica de la función cuando pasa de un tipo de concavidad a otra.



La precisión de la representación del GeoGebra permite comprender como el punto de inflexión diferencia la forma de la gráfica pasado de ser cóncava a convexa, o inversamente.

## **Propuesta de enseñanza**

- Estudio de la monotonías de la función a través de la derivada.
- Estudio de la monotonía de la derivada a través de la segunda derivada.
- Calculo del punto de inflexión.
- Observación del cambio que experimenta la gráfica cuando cambiar de una concavidad a otra.

## **CONCLUSIONES**

Tras la resolución por parte de los estudiantes de tres cuestionarios, se obtuvieron los resultados, que nos permitieron observar como los estudiantes habían acabado las sesiones con una comprensión clara de los conceptos estudiados.

El GeoGebra ha favorecido:

- La visualización de conceptos gracias a sus imágenes dinámicas.
- La comprensión e integración de los conceptos.
- Un aprendizaje significativo. Los alumnos iban relacionando la nueva información con la aprendida en las sesiones anteriores.
- Un ambiente de mayor participación y discusión de las informaciones. Se podía notar la motivación en el nuevo objeto de aprendizaje utilizado, tanto en el hecho de investigar en un medio informático, como en la posibilidad de visualizar imágenes dinámicas y comprender ciertos conceptos que desconocían.
- Un trabajo individual con atención personalizada.

No obstante, no podemos afirmar que han llegado a obtener un grado de abstracción y generalización que permita a los estudiantes utilizar estos conceptos en la resolución de problemas.

Por último, consideramos que el GeoGebra puede usarse en diferentes ramas de las matemáticas favoreciendo el aprendizaje de los alumnos. Por ello es necesario promover técnicas de aprendizaje haciendo uso de las nuevas tecnologías en profesores y alumnos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARIZA, A.; LLINARES, S. (2009) Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económico en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias*. 27(1), pp. 121-136. Universidad de Alicante.

BALLARD, C.L., JOHNSON, M.F. (2004). Basic Math Skills and Performance in an Introductory Economics Class. *The Journal of Economic Education*. 35(1), pp.3-23

BISHOP, A.J. (1989) Review of reseach on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol 11.1, pp. 7-16

CONTRERAS, M. (2012) Apuntes de clase de Análisis del *Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria*. Universidad de Valencia.

D'AMBRÓSIO, B. (1989) Como Ensinar Matemática Hoje? *Tema e Debates*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. II.N.2

DA SILVA, T. (2010) El estudio de las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales con la ayuda del GeoGebra. *Trabajo de Fin de Máster*. Capítulo I, pp. 5-8. Universidad de Valencia.

DEL GRANDE, J. (1990) Spatial sense, *Arithmetic Teacher*. Vol. 37.6, pp. 14-20.

DOLORES, C. (2000) Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal*. Capítulo V, pp. 155-181. (Actas de ICME-8 Sevilla) Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F.

FREUDENTHAL, H. (1983) El lenguaje algebraico. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Traducción de Luis Puig en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Capítulo 6. CINESTAV, 2001. México.

GUTIÉRREZ, A. (1991) Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias de 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Capítulo I, PP. 44-47. Universidad de Valencia.

GUTIÉRREZ, A. (2012) Apuntes de clase de Geometría del *Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria*. Universidad de Valencia.

IRANZO, N. (2009) Influence of dynamic geometry software on plane geometry problem solving strategie. *Tesi Doctoral*. Universidad Autónoma de Barcelona.

KRUTETSKII, V.A. (1976) *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago.

LODOÑO, R.A., JARAMILLO, C. ESTEBAN, P. (2011) La relación inversa entre cuadraturas y tangente en el modelo de Pirie y Kieren. XII CIAEM IACME. Brasil.

- LOPEZ, M. V., PETRIS, R.H., PELOZO, S. (2005) Estrategias Innovadoras mediante la aplicación de software. *Enseñanza-aprendizaje de funciones matemáticas en los niveles de EGB3 y Polimodal*. Universidad Nacional del Nordeste. Comunicaciones Científicas y tecnología.
- MEAVILLA SEGUI, V. (1995) Estudio sobre el comportamiento visual en álgebra de los alumnos del segmento educativo. *Enseñanza de las Ciencias*. 13(1), pp. 97-105. CEP de Teruel.
- MONZÓ, O. (2012) Apuntes de clase de Álgebra del *Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria*. Universidad de Valencia.
- PASCUAL, F. (2012) Apuntes de clase de Aprendizaje y desarrollo de las personalidad del *Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria*. Universidad de Valencia.
- PIRIE, S., THOMAS, K. (1994) Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It? *Educational Studies in Mathematics*. pp. 165-190
- PRESMEG, N.C. (1986) Visualization in high school mathematics. Fort he *Learning of Mathematics*. Vol. 6.3, pp. 42-46.
- RAMIREZ, A.J., ESTEVE, R. MOTENSINOS, P, DEUSA, M. (2009) Libro de texto de Matemáticas 2º Bachillerato. Editorial ECIR.
- REAL, M. (2011) GeoGebra: Una herramienta de software libre con gran potencial en la formación a distancia. *Jornadas de Innovación Docente*. Universidad de Sevilla
- SALAZAR, C.; DÍAZ, H; BAUTISTA, M. (2009) Descripción de niveles de comprensión de concepto derivada. *TEA*. Vol. 26, pp. 62-82.
- SÁNCHEZ, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. (2008) La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 11, pp. 267- 296. México D.F.
- TALL, D., VINNER, S. (1981) Concept image and definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. 12(2), pp. 151-169.
- VILLA-OCHOA, J.A. (2011) *Aspectos emergentes en la comprensión de la tasa de variación* (Departamento de Ciencias Básicas, Universidad de Medellín)