L'examen fatídic de matemàtiques de les PAU de 2013 (quasi) resolt amb el CAS del GeoGebra 4.4

Carlos Giménez, Associació Catalana de GeoGebra

<carlos.gimenez@gmail.com>

Abans de començar:

Assegureu-vos de tenir com a idioma de treball el català:

Opcions -> Idioma -> A-D -Català

Treballarem amb la finestra CAS, per això mirarem de tancar la resta

Visualitza -> CAS per activar aquesta finestra

Visualitza -> Desactivem una per una tota la resta de finestres actives (també es poden tancar amb la creu que tenen a la cantonada superior dreta

Un consell per projectar millor . . . i per a la presbícia: augmentar el tipus de lletra

Opcions -> Mida de la lletra -> Seleccionar una mida a partir de 18, 20, . . .

Quatre idees bàsiques del CAS del GeoGebra:

Les expressions s'introdueixen de forma "natural" (/ per a la divisió i ^ pels exponents)

Quan obrim un parèntesi (), claudàtor [] o clau {}, el GeoGebra automàticament genera el símbol de tancament corresponent; és còmode però cal tenir-ho present.

Els vectors s'han d'introduir entre claus i amb les components separades per comes

És molt útil anomenar una expressió ja que permet referir-se a ella a partir del seu nom. S'aconsegueix amb els signes :=

Entrades Bàsiques

- Enter o Intro, avalua l'entrada
- Ctrl + Enter, valora numèricament l'entrada
- Alt + Enter controla l'entrada però no l'avalua
  En una entrada de fila buida:
- la barra espaiadora reitera la sortida prèvia
-) reprodueix la sortida prèvia, entre parèntesi
- = repeteix l'entrada prèvia

Podem fer referències a les cel·les anteriors:

- Estàtiques: copien el contingut de la cel·la i no s'actualitzen si el valor de la cel·la es canvia
    - # copia la darrera sortida
    - #n copia la sortida de la cel·la n
    - Clicant en una cel·la es copia la seva sortida
- Dinàmiques: insereixen una referència al contingut d'una cel·la que s'actualitza en canviar el valor de la cel·la
    - $ insereix una referència a la sortida de la darrera cel·la
    - $n insereix una referència a la sortida de la cel·la n

Diferents usos del signe =

- El signe = s'utilitza per a les equacions
- El signe := serveix per a fer assignacions de variables
- El signe == s'utilitza per el control Booleà d'una igualtat, donant com a resultat un valor verdader o fals.

h:=2 li assigna a h el valor 2

h=2 en lloc d'assignar-li a h el valor 2, establirà una funció h amb el valor constant 2

h == 2 avaluarà si h equival a 2

Barra d'eines del CAS

=	≈	✓	$\frac{15}{3\cdot 5}$	(( ))	7↘□	x =	x ≈	∂	
Avalua	Valor numèric	Conserva entrada	Factoritza	Desenvolupa	Substitueix	Resol	Resolució numèrica	Derivada Integral	Elimina objecte

A continuació, intentarem aplicar les possibilitats del CAS del GeoGebra per a resoldre la major part de l'examen de matemàtiques de la prova de les PAU de juny del 2013, de trist record . . .

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Organització de Proves d'Accés a la Universitat

Proves d'Accés a la Universitat. Curs 2012-2013

Matemàtiques

Sèrie 4

1. Sabem que el vector (2, 1, −1) és una solució del sistema

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=a+c\\ bx-y+bz&=a-b-c\\ cx-by+2z&=b \end{aligned}\right\}$$

Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c.
[2 punts]

1	a x + b y + c z=a+c → $a\,x+b\,y+c\,z=a+c$
2	b x-y+b z=a-b-c → $b\,x+b\,z-y=a-b-c$
3	c x-b y+2z=b → $-b\,y+c\,x+2\,z=b$
4	a x + b y + c z = a + c Substitueix, x=2,y=1,z=-1: $a\,2+b-c=a+c$
5	b x + b z - y = a - b - c Substitueix, x=2,y=1,z=-1: $b\,2-b-1=a-b-c$
6	-b y + c x + 2z = b Substitueix, x=2,y=1,z=-1: $-b+c\,2-2=b$
7	Resol[{$4, $5, $6},{a, b, c}] → $\{\{a=3,b=1,c=2\}\}$

No podem escriure ax ; cal escriure-ho per separat

a x deixant un espai en blanc

Per a substituir:

1. Cliquem en una cel·la buida
2. Cliquem sobre l'expressió en la què volem substituir
3. Cliquem el botó

2. La corba $y = x^2$ i la recta $y = k$, amb $k > 0$, determinen una regió plana.
a) Calculeu el valor de l'àrea d'aquesta regió en funció del paràmetre k.
b) Trobeu el valor de k perquè l'àrea limitada sigui $\sqrt{6}\,u^2$.
[1,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*]

1 ○	f(x):=x^2 → $\mathbf{f(x) := x^2}$
2	g(x):=k → $\mathbf{g(x) := k}$
3 ○	Resol[f=g,x] → $\left\{\mathbf{x = -\sqrt{k}, x = \sqrt{k}}\right\}$
4	IntegralEntre[g,f,-sqrt(k),sqrt(k)] → $\mathbf{4\,k\,\frac{\sqrt{k}}{3}}$
5 ○	Resol[$4 = sqrt(6)] → $\left\{\mathbf{k = \frac{3}{2}}\right\}$

3. Sigui $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

a) Què significa que la matriu B sigui la matriu inversa de A?
b) Trobeu el valor del paràmetre p perquè la matriu inversa de A i la matriu transposada de A coincideixin.

NOTA: No aproximeu les arrels mitjançant valors amb decimals; treballeu amb els radicals.

[0,5 punts per l'apartat *a*; 1,5 punts per l'apartat *b*]

1

A:={{1/sqrt(2),1/sqrt(3),1/sqrt(6)},{0,1/sqrt(3),-2/sqrt(6)},{p,-1/sqrt(3),-1/sqrt(6)}}

$$\rightarrow \mathbf{A} := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ p & -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

2

Transposa[A]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & p \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

3

A $2

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\, p - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\, p - \frac{1}{2} & 0 & p^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4

Resol[Element[$3,1,3]]

$$\rightarrow \left\{ p = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

5

Resol[Element[$3,3,3] = 1]

$$\rightarrow \left\{ p = -\frac{\sqrt{2}}{2}, p = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

6

Substitueix[$3,p = sqrt(2) / 2]

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} & 0 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

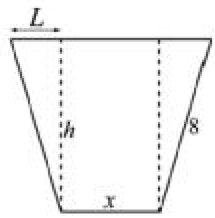
6

Substitueix[$3,p = sqrt(2) / 2]

$$✓ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si cliquem a la icona
✓ obtenim

4. Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$$

c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

[0,5 punts per l'apartat *a*; 0,5 punts per l'apartat *b*; 1 punt per l'apartat *c*]

1
L:=x/2
$\rightarrow \ \mathbf{L := \frac{1}{2}\,x}$

2
h:=sqrt(8^2-L^2)
$\rightarrow \ \mathbf{h := \frac{\sqrt{-x^2+256}}{2}}$

3
A:=h (x+2x)/2
$\rightarrow \ \mathbf{A := 3\,x\,\frac{\sqrt{-x^2+256}}{4}}$

4
3x sqrt(-x² + 256) / 4
Derivada: $\mathbf{-\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{-x^2+256}}+\frac{3}{4}\,\sqrt{-x^2+256}}$

5
Resol[$4]
$\rightarrow \ \mathbf{\left\{x=-8\,\sqrt{2},x=8\,\sqrt{2}\right\}}$

5. Donats els punts $P=(1,\ 0,\ -1)$ i $Q=(-1,\ 2,\ 3)$, trobeu un punt R de la recta $r: \frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-3}{-1}$ que compleixi que el triangle de vèrtexs P, Q i R és isòsceles, en què $\overline{PR}$ i $\overline{QR}$ són els costats iguals del triangle.
[2 punts]

Hem parametritzat $\frac{x+3}{2}=s \rightarrow x=2s-3$, etc

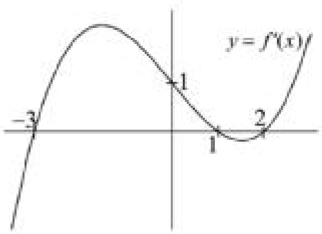
1	a:=(2s-3,3s-4,-s+3) → $a := (2s-3, 3s-4, -s+3)$
2	b:=(1,0,-1) → $b := (1, 0, -1)$
3	c:=(-1,2,3) → $c := (-1, 2, 3)$
4	Distància[a,b]=Distància[a,c] → $\sqrt{2}\ \sqrt{7s^2-24s+24} = \sqrt{2}\ \sqrt{7s^2-22s+20}$
5	Resol[sqrt(2) sqrt(7s² - 24s + 24) = sqrt(2) sqrt(7s² - 22s + 20)] → $\{s = 2\}$
6	(2s - 3, 3s - 4, -s + 3) Substitueix, s=2: $(1, 2, 1)$

6. La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty, -3]$ i $[2, +\infty)$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

[1 punt per cada apartat]



I aquesta?