Seminari Internacional

III Jornada de l'ACG

18 i 19 de febrer de 2011

Primeras clases de Geometría con GeoGebra

Laura Morera (1), Laura Ansorena (2)

(1) Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), AULA Escola Europea, Laura.Morera@uab.cat,

(2) AULA Escola Europea, lansorena@aula-ee.com

Introducción

En los últimos años son muchas las publicaciones diversas que tienen como objetivo principal aportar nuevas visiones, resultados de investigaciones y nuevas teorías sobre el papel de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. En estos momentos las autoras estamos trabajando y aplicando en las aulas algunos de los conceptos que define la Teoría de la Instrumentación de Rabardel (2001), como las nociones de génesis instrumental (Artigue, 2002) y de orquestación instrumental (Trouche, 2004). La noción de génesis instrumental se refiere al paso de considerar el software como artefacto a considerarlo como instrumento, que supone la conjunción del artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para su uso. El concepto de orquestación instrumental se define como la organización intencional y sistemática del profesor y el uso de los artefactos disponibles en un entorno de enseñanza a fin de orientar la génesis instrumental del alumnado. En recientes artículos entorno a la didáctica de las matemáticas y la tecnología como (Drijvers & Weigand, 2010), (Trouche & Drijvers, 2010), (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010) y (Drijvers, 2011) se pone de manifiesto que aunque su uso sea un elemento positivo para el aprendizaje de las matemáticas y muchos docentes sean conscientes de ello, son muy pocas las prácticas formativas que incorporan la tecnología en el día a día. También comenta los posibles motivos por los cuales esto no sucede, como por ejemplo la falta de recursos de gestión de clase, o la falta de conocimiento de la propia herramienta. Esto nos ha hecho reflexionar y intentar animar a utilizar-lo a partir de nuestra propia experiencia.

Así, en este artículo nos proponemos explicar en primera persona cómo introducimos nosotras el programa GeoGebra en el estudio de la geometría en el plano al nivel de 3º de ESO en una escuela privada de Barcelona y dar ejemplos de algunos de los trabajos de los alumnos en los que se detectan errores, desarrollos y razonamientos específicos del trabajo en un entorno tecnológico.

La experiencia

Las autoras trabajamos conjuntamente en las asignaturas de matemáticas y dibujo técnico al nivel de 3º de ESO, así, tenemos una visión muy constructiva de la Geometría, y colaboramos para complementar los conceptos y los procesos que queremos transmitir interdisciplinarmente.

Actividad 1:

En esta práctica tendréis que hacer las construcciones siguientes con las herramientas más básicas del GeoGebra. ¡Veréis que va a haber herramientas restringidas!

*1.- **Construcción de una mediatriz**. Construir la mediatriz del segmento dado sin utilizar la herramienta “mediatriz”.*

*2.- **Construcción de una bisectriz**. Construir la bisectriz del ángulo dado sin utilizar la herramienta “bisectriz”.*

*3.- **Construcción de una perpendicular.** Construir la perpendicular de la recta r dada que pase por el punto C, sin usar la herramienta “perpendicular”.*

*4.- **Construcción de una paralela.** Construir la paralela de la recta r dada que pase por el punto C, sin usar la herramienta “paralela”.*

Figura 1. Enunciado de la primera actividad.

Para empezar, no dedicamos específicamente ninguna sesión a explicar técnicamente el software utilizado, que en nuestro caso es GeoGebra, sino que proponemos tareas que para ellos resultan familiares con regla i compás (ver Figura 1), para que trabajen por parejas en ordenador. La orquestación que llevamos a cabo mientras trabajan en esto, es la de *andar-mientras-trabajan*, definida por Drijvers (2011), que consiste en ir atendiendo particularmente a los alumnos que lo soliciten, resolviendo preguntas técnicas o conceptuales y favoreciendo el desarrollo de su génesis instrumental.

Como las construcciones son familiares para ellos, los alumnos se centran más en un aprendizaje técnico de la herramienta, pero en ese momento es cuando el profesor tiene un papel crucial, ya que mediante la orquestación que haga en las puestas en común, será donde transmita la esencia de la forma de trabajo.

Es importante para nosotras transmitir que no hay únicamente una forma correcta de resolver el ejercicio, pero quizá sí que se puede introducir el concepto de construcciones eficientes para que aprendan a optimizar el número de pasos para realizar una construcción. Para gestionar esta situación, nosotras proponemos una orquestación del tipo *discutir-en-la-pantalla* (Drijvers et al., 2010) que consiste en discutir entre todos que está sucediendo en la pantalla cuando se muestran, por ejemplo, tres construcciones que hayan realizado los estudiantes. Para ello, se requiere acceso previo a los trabajos de los estudiantes y posteriormente se puede gestionar una discusión sobre los pasos correctos e incorrectos, eficientes e ineficientes, originales y tradicionales, los que utilizan las herramientas clásicas y los que incorporan nuevas…

Otro concepto que nos gusta mucho transmitir a los alumnos es que sean conscientes de la diferencia entre dibujos y figuras (Laborde y Capponi, 1994), para definirlo de una forma rápida, podríamos decir que tanto los dibujos como las figuras, son construcciones que cumplen las propiedades del objeto geométrico que se está construyendo, pero al arrastrar alguno de los puntos independientes o parcialmente independientes en el caso del dibujo, se pierden las propiedades mientras que en el caso de las figuras, se siguen manteniendo. Les transmitimos la idea de que siempre es mejor intentar construir figuras que mantengan las propiedades. Así, también nos introduce al hecho de trabajar con variables y manejar la visión dinámica que nos ofrece el software.

En los ejemplos anteriores, podríamos observar que una figura de la mediatriz, permanecería siendo una mediatriz por mucho que variáramos el segmento inicial, o una figura de una recta paralela a r pasando por C, seguiría cumpliendo la propiedad de paralelismo por mucho que modificásemos las condiciones iniciales tanto de la recta r como del punto C.

Otra aplicación que tiene para nosotras la realización de estos ejercicios en la fase inicial de la interacción con el software es la conexión que hacemos con la asignatura de informática, en la cual nuestros alumnos programan con C++. Este tipo de ejercicios que han hecho hasta ahora, se pueden entender como macros, es decir, como funciones (en lenguaje C++) que lo que hacen es crear justamente las herramientas que han tenido bloqueadas para la realización de los ejercicios.

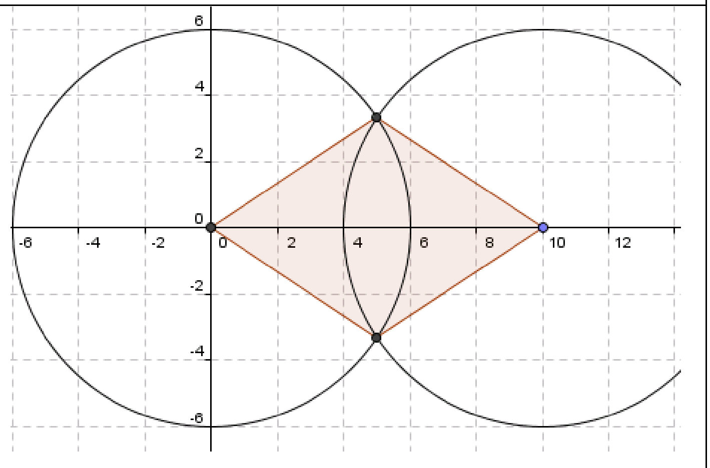
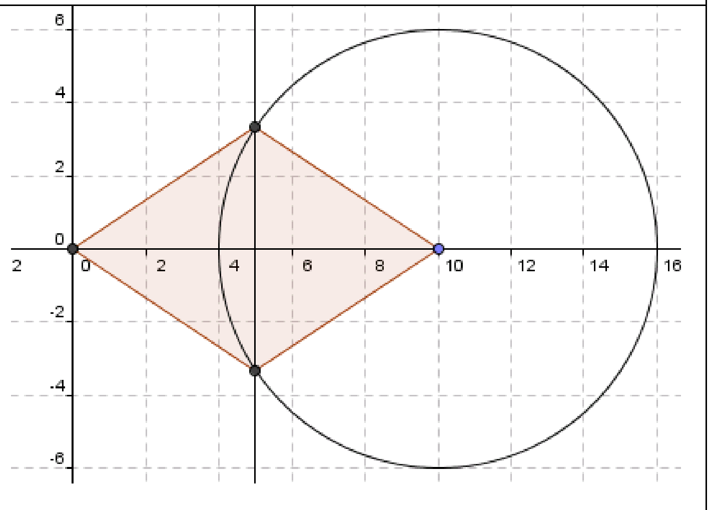
Después de esta primera tarea, en la siguiente sesión de clase les proponemos una segunda actividad (ver Figura 2). En este caso el elemento que se les hace construir, un rombo, no lo han construido previamente en la clase de dibujo técnico, aunque sí que saben su definición matemática.

Actividad 2: ***Construcción de un rombo.*** *Construir un rombo dados el lado (6 u) y la diagonal (10 u) que al arrastrar los puntos independientes siga siendo un rombo cualquiera. En este ejercicio si que podéis usar todas les herramientas que os sean necesarias.*

Figura 2. Enunciado de la segunda actividad.

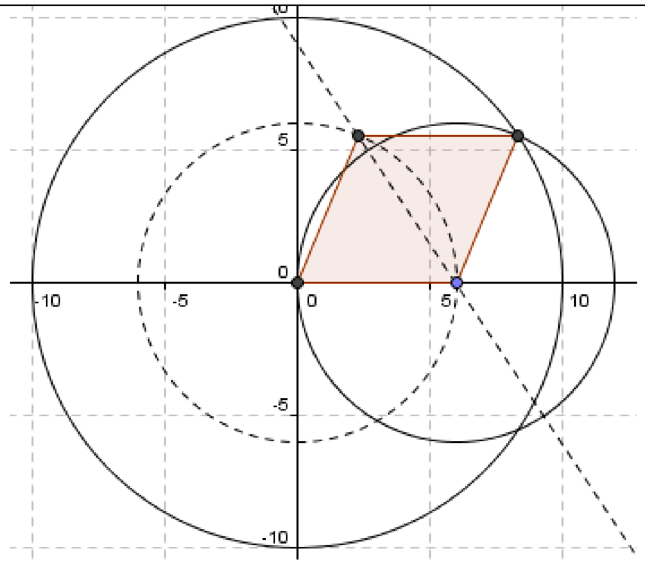
En este caso, siguiendo con la idea de dejar que trabajen en parejas y posteriormente hacer una puesta en común orquestada por el profesor, destinamos la sesión de clase a trabajar con la construcción de esta figura intentando no dar información adicional, siendo los alumnos los encargados de descubrir distintos modos de construcción.

En este caso nos gustaría mostrar las diferentes construcciones a las que llegaron los alumnos (ver Tabla 1) así como también algunos de los errores más comunes.

Construcciones del rombo de diversos alumnos	
Alumno 1: Construye la diagonal de 10 unidades ayudándose del eje, y construye circunferencias de centro los extremos de la diagonal, con radio 6.	
Alumno 2: Construye la diagonal de 10 unidades ayudándose del eje, y construye la mediatriz del segmento y una circunferencia de centro uno de los extremos de la diagonal, con radio 6.	

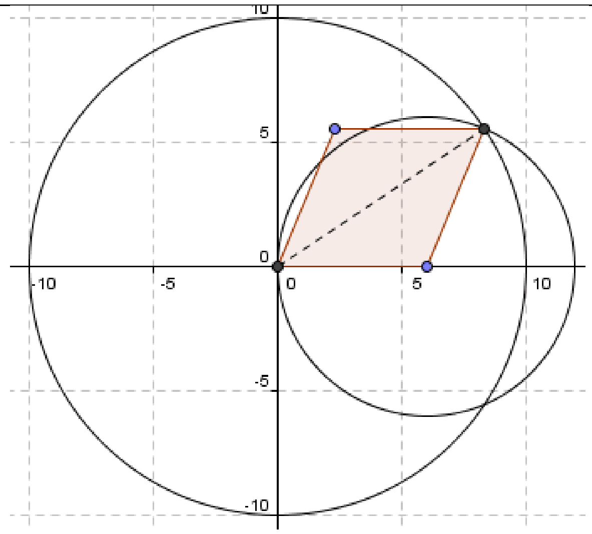
Alumno 3:

Construye el lado de 6 unidades ayudándose del eje. Construye una circunferencia de radio 10 des de un extremo y otra de radio 6 des del otro. Una vez tiene los extremos de la diagonal mayor, encuentra el vértice restante con cualquiera de las construcciones de los Alumnos 1 o 2.



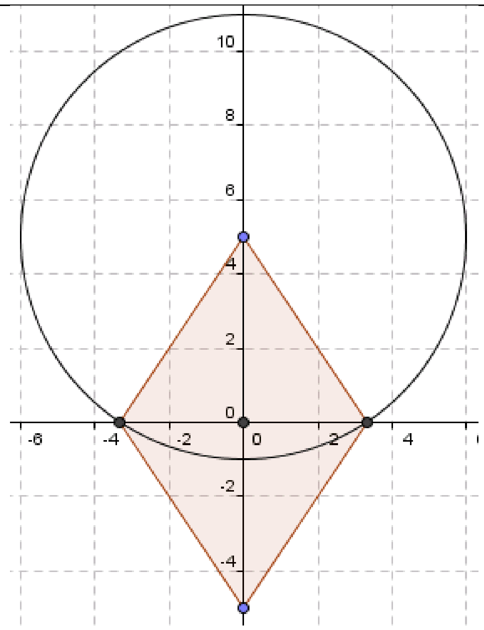
Alumno 4:

Construye el lado de 6 unidades ayudándose del eje. Construye una circunferencia de radio 10 des de un extremo y otra de radio 6 des del otro. Una vez tiene los extremos de la diagonal mayor, encuentra el vértice restante haciendo una simetría axial del vértice opuesto respecto del segmento que definen los extremos de la diagonal mayor.



Alumno 5:

Construye la altura de un triángulo isósceles de 10/2 unidades. Construye una circunferencia de radio 6 con centro uno de los extremos de la altura y se ayuda del eje para determinar los puntos de intersección, que serán los extremos de la diagonal menor. A continuación, hace la simetría axial del triángulo isósceles respecto la diagonal menor.



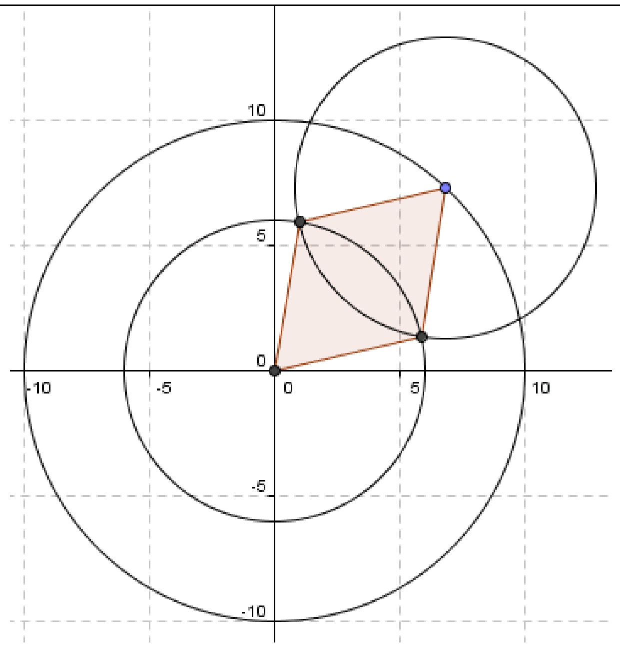
Alumno 6: Construye dos circunferencias concéntricas de radios 6 y 10 respectivamente. Después de determinar un punto cualquiera sobre la circunferencia de radio 10, utiliza este punto como centro de una circunferencia de radio 6, que intersecada con la otra determina los extremos de la diagonal menor.	

Tabla 1. Diferentes construcciones de la Actividad 2.

Hay que notar que todos los alumnos construyeron rombos de las dimensiones que se les pedía ayudándose muchas veces de la cuadrícula de fondo, pero no era posible cambiar las dimensiones requeridas como condiciones iniciales, así este año nos gustaría introducir una modificación en el enunciado y es que las dimensiones del rombo tienen que ser *a* y *b*, donde estas dos variables son segmentos dados en la pantalla de GeoGebra, la cual no tendrá cuadrícula ni la posibilidad de ponerla.

Para nosotras es interesante el hecho de que cada vez que llevamos una actividad al aula, nos damos cuenta de mejoras que podríamos hacer, pero intentamos pensarlo siempre como mejoras para el futuro y nunca como fracasos del pasado. Con eso, nos gustaría transmitir que nosotras también tenemos nuestra génesis instrumental, y que puede ir en paralelo con la de los alumnos.

Observando la actividad propuesta, y con la modificación propuesta, creemos que podría ser interesante plantear la deducción de la discusión de las dimensiones relativas del rombo a efectos de que sea construible y su generalización de que para que un rombo sea construible sus lados deben ser como mínimo, mayores que la mitad de la diagonal mayor. Creemos que es una continuación natural de la actividad y con esto acabarían de tener más claras las propiedades de la figura en la que se ha trabajado.

Por otro lado, a parte de la riqueza de construcciones que ofrece la actividad, nos detenemos en los errores más típicos con los que nos encontramos, como pueden ser no tener precisión a la hora de marcar puntos o no definir-los mediante la intersección de elementos, sino a ojo.

También debemos estar atentos a la posibilidad de que algún alumno no tenga clara la definición matemática de rombo, construyendo así diferentes figuras que no cumplan algunas de las propiedades requeridas.

En base a nuestra experiencia, después de realizar la puesta en común y hablar con los alumnos acerca de ello, nos parece interesante transmitir que sus impresiones son muy positivas y el mensaje general es que una de las cosas que más les gusta es poder ver cómo han resuelto el mismo problema los diversos compañeros para aprender distintas formas de hacerlo.

Después de esta segunda actividad que hemos detallado, les proponemos dos más para profundizar en la materia a la vez que mejoran su génesis instrumental.

Esperamos poderlas explicar en detalle en alguna otra ocasión, pero hacemos una presentación un tanto escueta de ellas para que el lector se pueda hacer una idea.

La tercera actividad que proponemos consiste en la construcción, un tanto típica, de los puntos notables de un triángulo, pero siguiendo con la línea de trabajo que hemos presentado previamente, le damos mucha importancia al tipo de preguntas que podemos plantearles a los alumnos una vez tienen la construcción finalizada para que aprovechen el dinamismo que aporta el software utilizado, como:

- ¿Cuáles de los cuatro puntos son centros de circunferencias y por qué?
- ¿Cuáles son las posiciones relativas de los puntos notables respecto el triángulo? ¿Se sitúan siempre en su interior, o en su exterior? ¿Por qué?

- ¿Si se observan los cuatro puntos a la vez se puede deducir alguna propiedad?
- O si han visto que tres puntos siempre están alineados, ¿cuál es la posición relativa entre ellos?

La cuarta y última actividad propuesta en este tema introductorio antes de dar paso al tema de las transformaciones en el plano, es la de deducir las propiedades del ángulo inscrito en una circunferencia a partir de su ángulo central. Aunque no vamos a entrar en detalle nos gustaría comentar que el último año, la discusión de esta actividad nos llevó a pensar sobre la demostración de la construcción del arco capaz de un ángulo cualquiera, cosa que encontramos muy positiva y será otra de las incorporaciones para este año.

Reflexiones finales

Una vez llegados a este punto, nos damos cuenta de que hemos ido transmitiendo las ideas fundamentales a lo largo del artículo, pero querríamos resaltar dos hechos que se derivan de nuestras clases con GeoGebra. Primero que nuestros alumnos son de una generación con capacidad de sobra para familiarizarse con un entorno digital sin problemas i prácticamente sin necesidad de “manual del usuario” por lo que introducir el software directamente con estas cortas actividades, sin prácticamente explicaciones previas, encuadran y dinamizan la presentación del tema de geometría del curso y ellos lo reciben con agrado. Y en segundo término que los alumnos con más curiosidad, de forma muy espontánea, son capaces de descubrir y generalizar características geométricas que de otro modo sería necesario explicar de forma teórica en clase.

Como reflexión final, fijando la vista en el papel del profesor en el trabajo en entornos tecnológicos, lo que realmente vemos claro después de analizar nuestra experiencia, es la importancia de la gestión de la clase después de plantear un problema, y la variedad de objetivos que se pueden alcanzar con un mismo problema aparentemente sencillo. Por eso, animamos tanto a los docentes que pertenecen al grupo de los que no utiliza tecnología en las aulas, a que empiecen con pequeñas prácticas y actividades, como a los docentes que ya están familiarizados con su uso, a que reflexiones sobre las potencialidades escondidas que seguro que tienen las actividades que ya utilizan.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Drijvers, P. (2011). Teachers transforming resources into orchestrations. Presented at the CERME 7, Rzeszów, Poland.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 213-234.

Drijvers, P., y Weigand, H. (2010). The role of handheld technology in the mathematics classroom. *ZDM*, *42*(7), 665-666.

Laborde, C., y Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1.2), 165-210.

Rabardel, P. (2001). Instrument mediated activity in situations. In A. Blandford, J. Vanderdonckt, & P. D. Gray (Eds.), *People and computers XV-interactions without frontiers* (pp. 17-30). Springer.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307.

Trouche, L., y Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: flashback into the future. *ZDM*, *42*(7), 667-681.